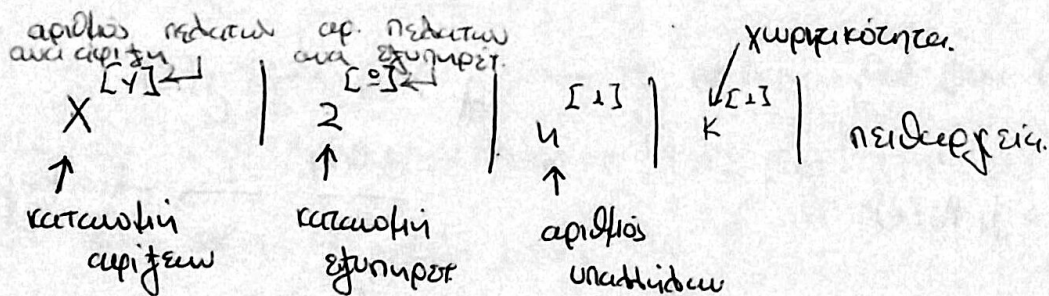


Χαρακτηριστικά ευστήκτου εξυπηρέτησης

- (1) Χωρητικότητα γράου αναμονής
- (2) Τρόπος αρίθρσης πελατών
- (3) Αριθμός πελατών ανά αρίθρση
- (4) Αριθμός υπαλλήλων εξυπηρέτησης
- (5) Τρόπος εξυπηρέτησης πελατών
- (6) Αριθμός πελατών ανά εξυπηρέτηση
- (7) Παιδαργία όπως FCFS (FIFO) (First in First out)
LCFS



Ερωτήματα που θέλουμε να απαντήσουμε

- 1) $P_n(t)$ (Μετα από πόσο + πόσα έχω n πελάτες)
- 2) P_n (ορισμένες ιδιότητες)
- 3) Κατανομή του γράου αναμονής του πελάτη
- 4) Οριστική κατανομή του γράου αναμονής του πελάτη
- 5) Τρόπος ευστήκτου αναμονής υπαλλήλων
- 6) Διαδικασία αναμονής.

$M | M | 1 | \infty | FCFS$

First
Come
First
Served.

$$P(A) \sim \text{Exp}(\mu)$$

$f(t)$: αριθμός πελάτων στο έστιαριο μετά από χρόνο t από την αρχή λειτουργίας

$$\{f(t) : t \geq 0\}$$

$$P_n(t) = P(f(t) = n | f(0) = 0)$$

$$P_{n,n+1}(dt) = \lambda dt + o(dt) \quad \leftarrow \text{ενεργεί είναι Poisson}$$

$$P_{n,n-1}(dt) = \mu dt + o(dt) \quad \leftarrow \text{ενεργεί είναι εκθετική}$$

$$P_{nj}(dt) = o(dt) \quad j \neq n-1, n+1$$

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = \mu$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_j(0) = 0 \quad j = 1, 2, \dots$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \lambda P_0(t) = \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) P_n(t) = \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$P_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Pi_n(z) = \int_0^\infty e^{-zt} P_n(t) dt$$

$$\begin{aligned} * \quad f(x) &\xrightarrow{\mathcal{L}} g(z) \\ \uparrow \quad \frac{df(x)}{dx} &\xrightarrow{\mathcal{L}} -f(0) + zg(z) \end{aligned}$$

$$\text{Re}(z) > 0$$

*

$$-P_0(0) + 2\Pi_0(z) + \lambda \Pi_0(z) = \mu \Pi_1(z)$$

$$-P_1(0) + 2\Pi_1(z) + (\lambda + \mu) \Pi_1(z) = \mu \Pi_{n+1}(z) + \lambda \Pi_{n-1}(z) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(A+2) \Pi_0(z) = \mu \Pi_1(z) + 1$$

$$(2+A+\mu) \Pi_n(z) = \mu \Pi_{n+1}(z) + A \Pi_{n-1}(z)$$

$$(\psi D^2 - (2+A+\mu)D + A) \Pi_{n-1}(z) = 0 \quad (\text{εξίσωση Διαφορών})$$

$$\Pi_n(z) = A \alpha^n(z) + B \beta^n(z) \quad \leftarrow \text{Γενικός τύπος λύσης εξίσωσης}$$

$$\mu x^2 - (2+A+\mu)x + A = 0 \quad (\text{Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο})$$

↑
Βρίσκω ρίζες (1 ρίζα στο μοναδιαίο)

$$\text{Πρέπει } \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(t) = 1 \quad (\text{Παίρνω μετασχηματισμό Laplace})$$

$$A \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n(z) + B \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n(z) = \frac{1}{z} \quad \text{Re}(z) > 0$$

↑
εργάζομαι εφόσον είχα πονη να εγείνη και το αίτιο κείνο

ΘΕΩΡΗΜΑ Rouché

↪ Αυτό να θυμάσαι αυτών!
τον τρόπο που είναι

Έστω ότι έχουμε 2 μιγαδικές συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ που είναι αναλυτικές μέσα ή πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C και αν $|f(z)| \leq |g(z)|$ στο C τότε οι $g(z)$ και $f(z) + g(z)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο C

$$f(x) = \mu x^2 + A$$

$$g(x) = (2+A+\mu)x$$

$$f(x) < g(x)$$

$$C: \{x: |x| = 1\}$$

$$|f(x)| \leq \mu |x|^2 + A = \mu + A$$

$$|g(x)| = |2+A+\mu| |x| = |2+A+\mu| = \sqrt{(A+\mu + \text{Re}(z))^2 + \text{Im}(z)^2}$$

μέσα στον μοναδιαίο κύκλο οι $g(x)$, $f(x) - g(x)$ θα έχουν ^{ίδιο} αριθμό ριζών

$$a(z) > 1 > b(z)$$

Επειδή $a(z) > 1$ πρέπει το A να το ρίξω 0 αλλιώς δεν θα συγκλίνει $\Rightarrow B \sum_{n=0}^{\infty} b^n(z) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = B \frac{1}{1-b(z)} \Rightarrow B = \frac{1-b(z)}{2}$$

$$\text{Άρα } \pi_n(z) = B b^n(z) = \frac{1-b(z)}{2} b^n(z)$$

Θεωρητικά μπορεί να αντιστρέψω και να βρω την $P_n(t)$

$$M|M|1|\infty| \text{ FIFO}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$$

$$\text{Έχουμε βρει: } P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \dots \mu_i} \right)^{-1}$$

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad P_n = \rho^n P_0$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda \dots \lambda}{\mu \dots \mu} \right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i}$$

$\rightarrow$ Αν $\rho \geq 1$ $P_n = 0$ το σύστημα που δεν πάει ποτέ σε κατάσταση ισορροπίας

$$\rightarrow \text{Αν } \rho < 1 \quad P_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = 1-\rho$$

$$P_n = (1-\rho) \rho^n \quad \forall n$$

-3

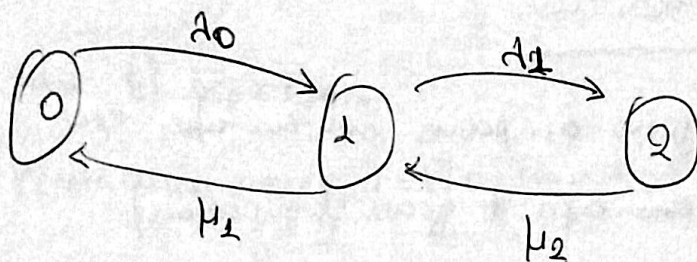
$$\text{Ποσότητα κυκλοφορίας} = \frac{E(\text{Γρήγορος εξυπηρέτ.})}{E\left(\begin{matrix} \text{Διαδρομή πεζαριού} \\ \text{2 διαδοχικών} \\ \text{αφίξεων} \end{matrix}\right)} = \frac{1/\mu}{1/A} = \frac{A}{\mu} < 1$$

$$P_n = \begin{cases} (1-p)p^n & , p < 1 \\ 0 & , p \geq 1 \end{cases}$$

όπου p : ποσότητα κυκλοφορίας

πρώτα ~~κατα~~ κατεύθυνση αν $p = \frac{A}{\mu} < 1$.

Γενικά στο σύστημα πρέπει οι πιθανότητες εφόδου και εξόδου να είναι ίσες

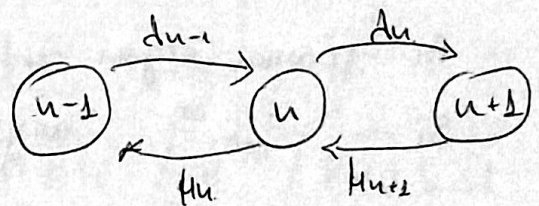


$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$$

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_1$$

⋮

$$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$$



→ Μέγεθος αριθμός πελατών στο σύστημα L :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n (1-p) p^n = (1-p) p \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = (1-p) p \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} p^n =$$

$$= (1-p) p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-p} \right) = \frac{(1-p)p}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{p}{1-p}}$$

Μέσος αριθμός νεύρων που περιφέρονται: Lq .

$$Lq = \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{P}_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)p^{n-1} =$$

$$= (1-p)p^2 \sum_{n=1}^{\infty} n p^{n-1} = (1-p)p^2 \frac{d}{dp} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n \right) =$$

$$\Rightarrow \cancel{Lq} = (1-p) \frac{p^2}{(1-p)^2} \Rightarrow \boxed{Lq = \frac{p^2}{(1-p)}} \quad p < 1.$$

όπου $\bar{P}_0 = P_0 + P_1$
 $\bar{P}_n = P_{n+1} \quad n \geq 1$

→ Ανάλυση του γρόνου αναμονής νεύρων

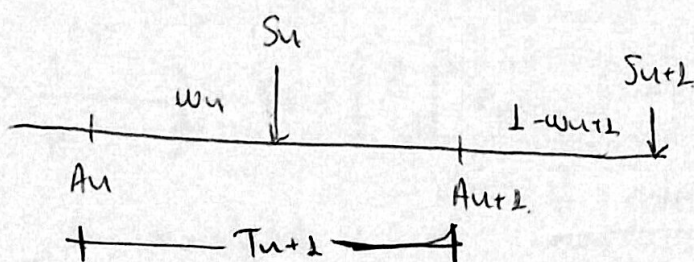
W_n : τ.μ που περιγράφει τον γρόνο αναμονής στο εσωτερικό του n -οστού νεύρου (γρόνος εσω αφα + γρόνος εξωτερικού)

$f_W(w)$ σ.π.π $f_W(w)dw = P(w < W_1 < w + dw)$

A) Όταν έρθει ο $n+1$ νεύρος, ο n νεύρος να έχει φύγει.

A_i χρονική στιγμή άφιξης του i νεύρου

S_i -"- αναχώρησης



$$T_{n+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

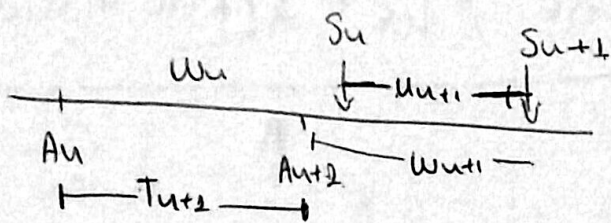
U_{n+1} γρόνος εξωτερικού

$$U_{n+1} \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$U_{n+1} = W_{n+1}$$

$$W_n < T_{n+1}$$

β) Όταν έρθει ο $u+1$ πελάτης ο u δεν έχει φύγει



$$T_{u+1} \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$U_{u+1} \sim \text{Exp}(\mu)$$

$$U_{u+1} < W_{u+1}$$

$$W_u + U_{u+1} = T_{u+1} + W_{u+1}$$

Για το A) περίπτωση

$$P(W < W_{u+1} < W + dw) = P(W < U_{u+1} < W + dw, 0 < T_{u+1} < \infty, W_u < T_{u+1}) =$$

$$= \mu e^{-\mu W} dW \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f_u(x) dt dx$$

↓ πιθανότητα
εμφάνισης

Για το B) περίπτωση

$$P(W < W_{u+1} < W + dw) = P(0 < T_{u+1} < \infty, 0 < U_{u+1} < W, T_{u+1} - U_{u+1} + W < W_u < \infty, T_{u+1} - U_{u+1} + W + dw) =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^W \mu e^{-\mu u} du f_u(t - u + W) dW dt$$

$$f_{u+1}(W) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \mu e^{-\mu u} du f_u(t - u + W) dt + \mu \lambda e^{-\mu W} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t f_u(x) dx dt$$

$$f_1(W) = \mu e^{-\mu W}$$

$$f_{u+1}(W) \frac{dW}{dW} = P(W < W_{u+1} < W + dW)$$

ω: πρώτος αναμονής του τυχαίου πελάτη στο σύστημα

$$f(W)^{dw} = P(\infty < W < W + dW)$$

$$f(W) = \lim_{n \rightarrow 0} f_n(W)$$

$$f(w) = \underbrace{\mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \int_0^t f(x) dx dt}_A + \underbrace{\int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \int_0^w \mu e^{-\mu u} f(t+w-u) du dt}_B$$

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{-zw} f(w) dw$$

$$\mathcal{L}(A) = \int_0^{\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \int_0^t f(x) dx dt dw =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-zw} \mu e^{-\mu w} \int_0^{\infty} f(x) \int_x^{\infty} A e^{-\lambda t} dt dx dw =$$

$$= \int_0^{\infty} \mu e^{-(2+\mu)w} \int_0^{\infty} f(x) \left(-e^{-\lambda t} \Big|_x^{\infty} \right) dt dw =$$

$$= \frac{\mu}{2+\mu} \int_0^{\infty} f(x) e^{-\lambda x} dx = \frac{\mu}{2+\mu} g(\lambda)$$

$$\mathcal{L}(B) = \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-zw} \int_0^w \mu e^{-\mu u} f(t+w-u) du dw dt =$$

$$= \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} e^{-zu} \int_u^{\infty} e^{-2(w-u)} f(t+w-u) dw du dt =$$

$$= \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu u} e^{-2u} e^{2t} \int_0^{\infty} e^{-2(x+t)} f(t+x) dx du dt =$$

$$= \int_0^{\infty} A e^{-\lambda t} \frac{\mu}{2+\mu} e^{-2t} \int_t^{\infty} e^{-2y} f(y) dy dt =$$

$$= \frac{\lambda \mu}{2+\mu} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+2)t} \int_t^{\infty} e^{-2y} f(y) dy dt =$$

$$= \frac{\lambda \mu}{2+\mu} \int_0^{\infty} e^{-2y} f(y) \int_0^y e^{-(\lambda-2)t} dt dy =$$

$$= \frac{\lambda \mu}{2+\mu} \int_0^{\infty} e^{-2y} f(y) \frac{1}{\lambda-2} (1 - e^{-(\lambda-2)y}) dy =$$

$$= \frac{\lambda \mu}{(2+\mu)(\lambda-2)} \left(\int_0^{\infty} e^{-2y} f(y) dy - \int_0^{\infty} e^{-\lambda y} f(y) dy \right) =$$

$$= \frac{\lambda \mu}{(2+\mu)(\lambda-2)} (g(2) - g(\lambda))$$

$$g(2) = \frac{\mu}{2+\mu} g(\lambda) + \frac{\lambda \mu}{(2+\mu)(\lambda-2)} (g(2) - g(\lambda))$$

$$g(2) = \frac{\frac{\mu}{2+\mu} (1 - \frac{\lambda}{\lambda-2}) g(\lambda)}{1 - \frac{\lambda \mu}{(2+\mu)(\lambda-2)}} = \frac{-\mu^2}{-2^2 + (\lambda+\mu)2 + \lambda\mu - \lambda\mu} g(\lambda) = \frac{\mu g(\lambda)}{2 - (\lambda+\mu)}$$

$$g(0) = 1$$

$$1 = \frac{\mu}{0 - (\lambda+\mu)} g(\lambda) \Rightarrow g(\lambda) = \frac{-(\lambda+\mu)}{\mu} = 1 \cdot \frac{1}{\mu} = 1 - \rho$$

$$g(2) = \frac{\mu(1-\rho)}{2 - (\lambda+\mu)} = \frac{\mu(1-\rho)}{2 + \mu(1-\rho)} \quad (\text{είναι ενδιαφέρον})$$

$$\mathcal{L}(a e^{-at}) = \frac{a}{2+a}$$

$$f(\omega) = \mu(1-\rho) e^{-\mu(1-\rho)\omega}$$

3' τρόπος

$$f(w)dw = P(w < W < w+dw) = P(w < W < w+dw \mid \text{να βρω 0 νεύρα}) P(\text{να βρω 0 νεύρα}) + \\ + P(w < W < w+dw \mid \text{να βρω 1 νεύρα}) P(\text{να βρω 1 νεύρα}) + \dots =$$

$$= \mu e^{-\mu w} P(\text{να βρω 0 νεύρα}) + \frac{\mu^2 w e^{-\mu w}}{1!} P(\text{να βρω 1 νεύρα}) + \dots$$

$$X_i \sim \text{Exp}(\mu) \quad X_1 + \dots + X_n \sim G(n, \frac{1}{\mu})$$

$$f(w)dw = P(w < W < w+dw) = \sum_{i=0}^{\infty} P(w < W < w+dw \mid i \text{ νεύρα στο σύστημα}) P(i \text{ νεύρα στο σύστημα}) \\ = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^{i+1} w^i e^{-\mu w}}{i!} dw p^i (1-p)$$

$$f(w) = \mu e^{-\mu w} (1-p) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mu w e)^i}{i!} = \mu e^{-\mu w} (1-p) e^{\mu p w} =$$

$$= \mu (1-p) e^{-\mu (1-p) w}$$

$$w \sim \text{Exp}(\mu(1-p))$$

Άσκηση

Σε ένα $M/M/1$ σύστημα βρείτε την κατανομή του αριθμού νεύρων που φθάνοντας βρίσκουν τον ίδιο συστημένο νεύρο να εξυπηρετείται.